Mathematik: Analyse und Ansätze
Leistungsstufe
2. Klausur

25. Oktober 2024

Zone A Vormittag | **Zone B** Vormittag | **Zone C** Vormittag

Prüfungsnummer des Kandidaten

2 Stunden

Hinweise für die Kandidaten

- Schreiben Sie Ihre Prüfungsnummer in die Felder oben.
- Öffnen Sie diese Prüfungsklausur erst nach Aufforderung.
- Für diese Klausur wird ein grafikfähiger Taschenrechner (GTR) benötigt.
- Teil A: Beantworten Sie alle Fragen. Die Antworten müssen in die dafür vorgesehenen Felder geschrieben werden.
- Teil B: Beantworten Sie alle Fragen im beigefügten Antwortheft. Tragen Sie Ihre Prüfungsnummer auf der Vorderseite des Antworthefts ein und heften Sie es mit dieser Prüfungsklausur und Ihrem Deckblatt mit Hilfe der beiliegenden Klammer zusammen.
- Sofern in der Frage nicht anders angegeben, sollten alle numerischen Antworten entweder exakt oder auf drei signifikante Stellen genau angegeben werden.
- Für diese Klausur ist ein unverändertes Exemplar der **Formelsammlung zu Mathematik: Analyse und Ansätze LS** erforderlich.
- Die Höchstpunktzahl für diese Prüfungsklausur ist **[110 Punkte]**.

8824 – 9716

Für eine richtige Antwort ohne Rechenweg wird möglicherweise nicht die volle Punktzahl anerkannt. Die Antworten müssen durch einen Rechenweg bzw. Erläuterungen ergänzt werden. Lösungen, die mit einem grafikfähigen Taschenrechner (GTR) berechnet werden, sollten von einem passenden Rechenweg begleitet werden. Wenn Sie zum Beispiel Graphen zum Finden einer Lösung verwenden, sollten Sie diese als Teil Ihrer Antwort skizzieren. Bei falschen Antworten können ggf. Punkte für die richtige Methode vergeben werden, sofern dies durch einen schriftlichen Rechenweg erkennbar wird. Deshalb sollten Sie alle Rechenwege offenlegen.

Teil A

Beantworten Sie **alle** Fragen. Die Antworten müssen in die dafür vorgesehenen Felder geschrieben werden. Bei Bedarf kann der Rechenweg unterhalb der Zeilen fortgesetzt werden.

1. [Maximale Punktzahl: 7]

Betrachten Sie die Funktion $f(x) = 11\sqrt{x} - 2x - 11$ mit $0 \leq x \leq 20$.

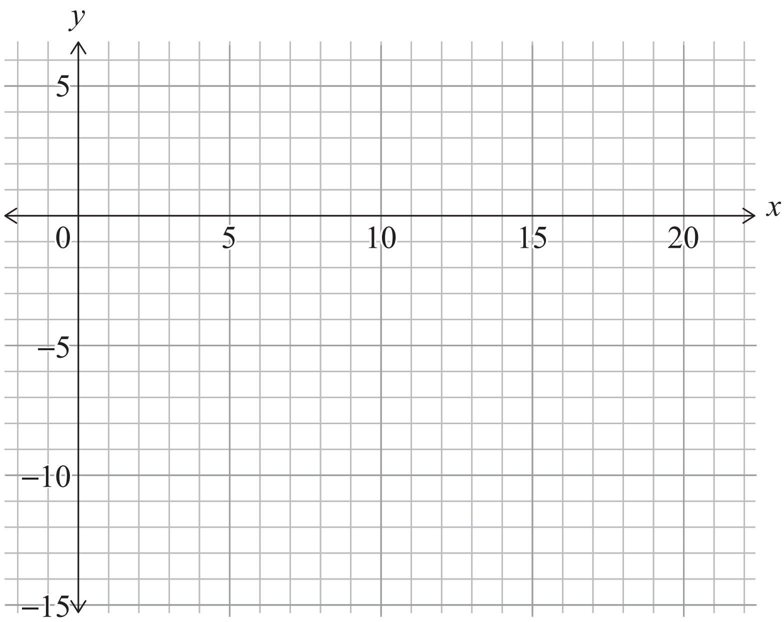
(a) Finden Sie den Wert von

(i) $f(0)$;

(ii) $f(20)$. [2]

(b) Finden Sie die beiden Lösungen von $f(x) = 0$. [2]

(c) Skizzieren Sie im folgenden Koordinatensystem den Graphen von $y = f(x)$. [3]



(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)

(Fortsetzung Frage 1)

2. [Maximale Punktzahl: 4]

Finden Sie den Koeffizienten von x^6 in der Entwicklung von $(2x - 5)^9$.

3. [Maximale Punktzahl: 5]

Eine diskrete Zufallsvariable X weist die folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung auf:

$$\mathrm{P}(X = x) = \frac{kx}{20} \text{ für } x \in \{3, 5, 8, 11\}.$$

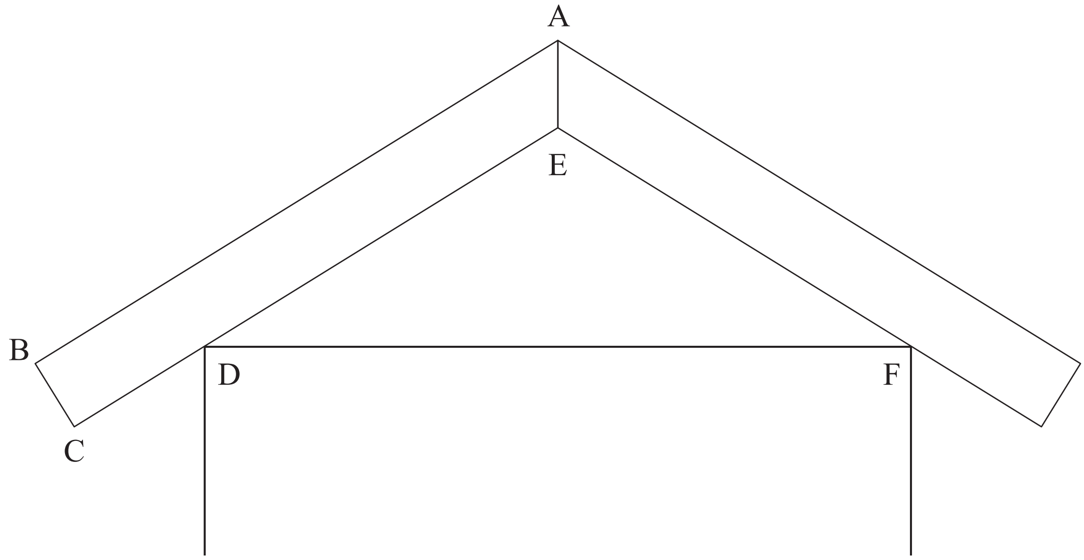
(a) Finden Sie den Wert von k. [2]

(b) Finden Sie $\mathrm{E}(X)$. [3]

4. [Maximale Punktzahl: 8]

Die folgende Abbildung zeigt den Querschnitt eines Hausdachs. Der Querschnitt ist symmetrisch zur vertikalen Geraden durch die Punkte A und E.

Abbildung nicht maßstabsgerecht



Die Steigung von $[\mathrm{BA}]$ beträgt $\dfrac{7}{12}$.

(a) Finden Sie die Größe des Winkels $\mathrm{B\hat{A}E}$ in Grad. [3]

(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)

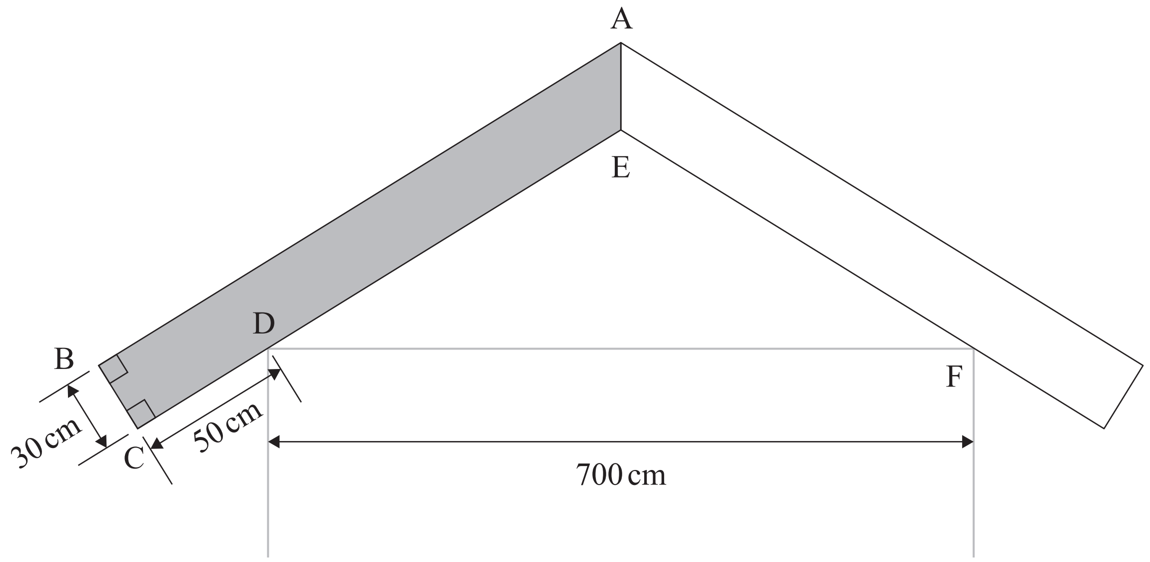
(Fortsetzung Frage 4)

Ein Handwerker benötigt die Längen der Seiten $[BA]$ und $[CE]$.

Der Handwerker hat die folgenden Maße:

$A\hat{B}C = B\hat{C}E = 90°$, $DC = 50\,\text{cm}$, $BC = 30\,\text{cm}$ und $DF = 700\,\text{cm}$.

Abbildung nicht maßstabsgerecht



(b) Finden Sie

(i) CE;

(ii) BA. [5]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

5. [Maximale Punktzahl: 5]

Betrachten Sie die Funktion $h(x) = \log_{10}(4x^2 - rx + r - 1)$ mit $x \in \mathbb{R}$.

Finden Sie die möglichen Werte von r.

6. [Maximale Punktzahl: 8]

Eine stetige Zufallsvariable X weist die folgende Wahrscheinlichkeitsdichte-Funktion auf:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & 0 \le x < 2 \\ -\frac{x}{30} + \frac{4}{15} & 2 \le x \le 8 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

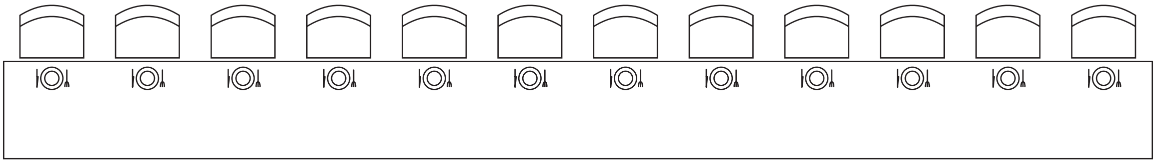
(a) Finden Sie $\mathrm{E}(X)$. [3]

(b) Es sei $\mathrm{E}(c - 2X) = 0$ mit einer Konstanten c. Bestimmen Sie den Wert von c. [2]

(c) Finden Sie den Median von X. [3]

7. [Maximale Punktzahl: 6]

Ein Selbstbedienungs-Sushi-Restaurant verfügt über eine Sitzreihe mit 12 freien Plätzen, wie in der folgenden Abbildung gezeigt.



Anvi, Vanya und Parita beschließen, zum Mittagessen in das Restaurant zu gehen.

(a) Finde die Anzahl der Möglichkeiten, wie sie in dieser Sitzreihe sitzen können, wenn sie **nicht** als 3er-Gruppe zusammensitzen wollen. [3]

Am nächsten Tag kommen Anvi, Vanya und Parita mit 3 weiteren Personen in dasselbe Restaurant und setzen sich in dieselbe Sitzreihe mit den 12 freien Plätzen. Anvi, Vanya und Parita beschließen nun, sich als 3er-Gruppe nebeneinander zu setzen.

(b) Finden Sie die Anzahl der Möglichkeiten, wie diese 6 Personen sitzen können. [3]

8. [Maximale Punktzahl: 6]

(a) Es gelte $w \in \mathbb{C}$. Beweisen Sie, dass $ww^* = |w|^2$. [2]

Zwei komplexe Zahlen z und w erfüllen die folgenden Gleichungen:

$$5w^* = (1 - 2\mathrm{i})z^2$$

$$zw = 10 + 10\mathrm{i}.$$

(b) Es sei $|w| = 2\sqrt{5}$. Finden Sie z in der Form $a + b\mathrm{i}$ mit $a, b \in \mathbb{Z}$. [4]

Bitte schreiben Sie **nicht** auf dieser Seite.

Antworten, die auf dieser Seite geschrieben werden, werden nicht bewertet.

9. [Maximale Punktzahl: 7]

Die Summe der ersten n Terme einer geometrischen Folge ist gegeben durch $S_n = \sum_{r=0}^{n-1} 5\left(\log_2 c\right)^r$.

(a) Finden Sie den Wertebereich der möglichen Werte von c so, dass S_n konvergiert. [3]

(b) Es sei $c = 1{,}5$. Finden Sie den kleinsten Wert von n so, dass $\left|S_\infty - S_n\right| < 0{,}1$ gilt. [4]

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

Teil B

Beantworten Sie **alle** Fragen im beigefügten Antwortheft. Bitte beginnen Sie jede Frage auf einer neuen Seite.

10. [Maximale Punktzahl: 15]

Die folgende Tabelle zeigt die Bevölkerungszahl von Kanada t Jahre nach dem Jahr 2000.

t (Jahre nach 2000)	0	5	10	15	20
p (Bevölkerungszahl in Millionen)	$30{,}7$	$32{,}2$	$34{,}0$	$35{,}7$	$37{,}9$

Ein Schüler modelliert die Bevölkerungszahl Kanadas nach diesen Daten mit Hilfe der linearen Regression.
Das Schülermodell lautet $p = at + b$.

(a) (i) Notieren Sie die Werte von a und b.

(ii) Interpretieren Sie den Wert von a in diesem Zusammenhang. [3]

Der Schüler nutzt dieses Modell zu einer Vorhersage für die Bevölkerungszahl Kanadas im Jahr 2030, also für $t = 30$. Damit errechnet er eine Bevölkerungszahl von etwa $41{,}3$ Millionen Menschen.

(b) Kommentieren Sie die Zuverlässigkeit der Vorhersage des Schülers. [1]

Der Datenwissenschaftler Benoit benutzt zusätzliche Informationen zur Entwicklung eines exponentiellen Modells für die zukünftige Bevölkerungszahl Kanadas.

In diesem Modell steht $B(t) = 33{,}5(1{,}005)^t$ für die Bevölkerungszahl Kanadas in Millionen, t Jahre nach dem Jahr 2000, mit $25 \le t \le 100$.

(c) (i) Prognostizieren Sie die Bevölkerungszahl Kanadas im Jahr 2100 anhand des Modells von Benoit.

(ii) Interpretieren Sie den Wert $1{,}005$ im Zusammenhang mit Benoits Modell. [3]

(Auf die vorliegende Frage wird auf der nächsten Seite weiter eingegangen)

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

(Fortsetzung Frage 10)

Eine andere Datenwissenschaftlerin, Cecilia, entwickelt ein drittes Modell für die kanadische Bevölkerungszahl.

In diesem Modell steht $C(t) = \dfrac{62}{1 + \mathrm{e}^{-0{,}02t}}$ für die Bevölkerungszahl Kanadas in Millionen, t Jahre nach dem Jahr 2000, mit $25 \le t \le 100$.

(d) Prognostizieren Sie die Bevölkerungszahl Kanadas im Jahr 2100 anhand des Modells von Cecilia. [1]

(e) Bestimmen Sie das Jahr, in dem der Unterschied zwischen den Vorhersagen nach Benoits Modell und Cecilias Modell am größten ist. [3]

(f) Finden Sie den Wert von

(i) $B'(75)$;

(ii) $C'(75)$. [2]

(g) Vergleichen und interpretieren Sie in diesem Zusammenhang die Werte von $B'(75)$ und $C'(75)$. [2]

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

11. [Maximale Punktzahl: 18]

Eine Gerade L ist definiert durch $L\colon\ -\frac{x}{2}+1=y+4=\frac{z}{3}$.

(a) Finden Sie die Gleichung von L in der Form $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$, mit $\lambda\in\mathbb{R}$. [3]

(b) Bestimmen Sie den kleinsten Abstand zwischen dem Ursprung O und der Geraden L. [5]

Eine Ebene Π ist definiert durch $\Pi\colon\ 6x-3y+5z=24$.

(c) Validieren Sie, dass Π die Gerade L enthält. [3]

Eine zweite Gerade M verläuft parallel zu Π.

Die Gerade M verläuft durch den Punkt $(4, 1, 2)$ und schneidet die z-Achse.

(d) Finden Sie die Gleichung von M in der Form $\boldsymbol{s}=\boldsymbol{c}+\mu\boldsymbol{d}$, mit $\mu\in\mathbb{R}$. [7]

Schreiben Sie **keine** Lösungen auf diese Seite.

12. [Maximale Punktzahl: 21]

Eine Kurve C hat die Gleichung $y = \frac{2x^2 + 6x - 3}{x + k}$, mit $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -k$ für eine positive reelle Konstante k .

(a) Zeigen Sie, dass gilt: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2x^2 + 4kx + 6k + 3}{(x + k)^2}$. [4]

(b) Ermitteln Sie den Wertebereich von k, für den ein lokaler Minimal- oder Maximalpunkt existiert. [4]

Betrachten Sie die Kurve C für $k = 2$.

(c) Notieren Sie die Gleichung der vertikalen Asymptote. [1]

(d) Finden Sie die Gleichung der schrägen Asymptote. [4]

(e) Zeigen Sie, dass für $x \in \mathbb{R}$, $x \neq -2$ gilt: $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} > 2$. [4]

(f) Skizzieren Sie die Kurve C . Zeigen Sie dabei deutlich die beiden Asymptoten und das allgemeine Verhalten von C bei der Annäherung an jede Asymptote. [Sie brauchen dazu keine Schnittpunkte mit den Achsen finden.] [4]

Bitte schreiben Sie **nicht** auf dieser Seite.

Antworten, die auf dieser Seite geschrieben werden, werden nicht bewertet.

Bitte schreiben Sie **nicht** auf dieser Seite.

Antworten, die auf dieser Seite geschrieben werden, werden nicht bewertet.

Bitte schreiben Sie **nicht** auf dieser Seite.

Antworten, die auf dieser Seite geschrieben werden, werden nicht bewertet.